E.N.S.E.T. B'' (TA) MATHEMATIQUES 1982

DURÉE : 3 heures

L'épreuve est constituée de trois problèmes obligatoires. Ils sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PREMIER PROBLÈME

On désigne par E l'ensemble des couples (f, g) de fonctions réelles de variable réelle, continues sur $\mathbb{R}$.

1° Montrer que E est un espace vectoriel réel, pour des opérations que l'on précisera.

2° Soit le système (S) d'équations :

$$(S)\begin{cases} \int_0^x f(t)dt = g(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_0^x g(t)dt = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où l'inconnue $(f, g) \in E$. Montrer que si (f, g) est une solution de (S) alors f et g sont des fonctions indéfiniment dérivables dans $\mathbb{R}$. Montrer que f (resp g) est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

3° Résoudre le système (S).

4° Résoudre le système (S_1) :

$$(S_1)\begin{cases} \int_0^x f(t)dt = x + g(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_0^x g(t)dt = x + f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où l'inconnue $(f, g) \in E$.

5° Soit l'application Φ qui au couple $(f, g) \in E$ fait correspondre le couple (h, k) défini par :

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt - g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$k(x) = \int_0^x g(t)dt - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b. Φ est-elle injective?

c. On désigne par e, s, c respectivement les fonctions définies par :

$$e(x) = x$$

$$s(x) = \sin x$$

$$c(x) = \cos x$$

Déterminer l'ensemble des antécédents par Φ des couples (e, e), (s, s), (c, c), (s, c) et (c, s).

DEUXIÈME PROBLÈME

On considère la fonction f_n, associée à l'entier n $(n > 1)$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{2\,shx}{e^{nx} - 1} \quad \forall x \neq 0.$$

1° Montrer qu'il existe un réel a_n tel que, si l'on pose $f_n(0) = a_n$, la fonction f_n soit continue sur $\mathbb{R}$.

2° Déterminer les limites à l'infini de $f_n(x)$ et en déduire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \mid f_n(x) \mid < M.$$

3° *a.* Montrer que l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \text{ existe.}$$

.../...

b. Calculer les intégrales I_2, I_3, I_4. Dans le cas où n est quelconque, montrer que le calcul de I_n peut se ramener au calcul d'une intégrale définie portant sur une fraction rationnelle.

4° *a.* Montrer que, quel que soit l'entier p, on a

$$f_n(x) = 2\,shx \sum_{k=1}^{k=p} e^{-nkx} + e^{-npx} f_n(x).$$

b. Montrer que

$$\lim_{p\to\infty} \int_0^{+\infty} e^{-npx} f_n(x)\,dx = 0.$$

c. Déduire de ce qui précède que :

$$I_n = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} (shx)\, e^{-nkx}\,dx.$$

5° *a.* Calculer le terme général de la série précédente.

b. Déterminer en utilisant ce qui précède les sommes des séries numériques suivantes :

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{4k^2-1}\ ;\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{9k^2-1}\ ;\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{16k^2-1}\ .$$

TROISIÈME PROBLÈME

Soit $\mathfrak{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soit D l'application qui, à tout polynôme $P \in \mathfrak{P}_n$ fait correspondre le polynôme dérivé P'. On note $D^0 = I$ l'application identique de $\mathfrak{P}_n$ et $D^k = DoD^{k-1}$ pour tout entier $k \geqslant 1$. On désigne enfin par $L(\mathfrak{P}_n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathfrak{P}_n$ dans lui-même muni de sa structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1° *a.* Vérifier que dans $L(\mathfrak{P}_n)$, $\{ I, D, D^2, ..., D^n \}$ est une partie libre.

b. Déterminer pour $k \geqslant 1$ le noyau et l'image de D^k.

2° Vérifier que $I = I - D^{n+1}$, en déduire que $I - D$ est inversible et déterminer son inverse.

3° On suppose dans cette question $n = 2m$ (m entier > 0).

Soit h un réel strictement positif, on définit l'application U_h qui, à tout polynôme $P \in \mathfrak{P}_n$ fait correspondre le polynôme U_hP défini par :

$$U_hP(x) = \frac{1}{h^2}\Big[P(x+h) + P(x-h) - 2\,P(x)\Big].$$

a. Montrer que U_h est un endomorphisme de $\mathfrak{P}_n$ et qu'il appartient au sous-espace vectoriel de base $(D^2, D^4, \ldots, D^{2m})$. [On pourra utiliser la formule de Taylor.]

b. Quel est le noyau de U_h ? Quelle est son image?

c. On définit $U_h^2 = U_h \circ U_h$ puis $U_h^p = U_h \circ U_h^{p-1}$ pour p entier > 1.

Montrer que U_h^p appartient au sous-espace vectoriel de base $(D^{2p}, D^{2p+2} \ldots D^{2m})$ pour $p \leqslant m$. Que peut-on dire de U_h^p pour $p > m$?

d. Calculer $\lim_{h\to 0} U_hP(x)$, P étant un polynôme de $\mathfrak{P}_n$ puis $\lim_{h\to 0} U_h^pP(x)$ pour tout entier $p > 1$.

FIN

134-1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail